Roll No. ..... Total No. of Printed Pages : 8

Code No. : BS-358

Online Annual Examination, 2022

B.Sc. Part III

MATHEMATICS

Paper I

[Analysis]

Time : Three Hours] [Maximum Marks : 50

नोट : *खण्ड 'अ' अति लघु उत्तरीय प्रकार का, जिसमें दस प्रश्न हैं, अनिवार्य है। खण्ड 'ब' में लघु उत्तरीय प्रकार के प्रश्न हैं एवं खण्ड 'स' में दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं। खण्ड 'अ' को सबसे पहले हल किया जाना है।*

Note : *Section 'A', containing 10 very short answer type questions, is compulsory. Section 'B' consists of short answer type questions and Section 'C' consists of long answer type questions. Section 'A' has to be solved first.*

खण्ड 'अ'

Section 'A'

*निम्नांकित अति लघु उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर एक **या** दो वाक्यों में दीजिए।*

Answer the following very short answer type questions in one or two sentences. **1 × 10 = 10**

1. होल्डर असमिका लिखिये।

Write Holder's inequality.

2. छद्म दूरीक समष्टि किसे कहते हैं ?

What is Pseudo metric space ?

3. सघन या सर्वत्र सघन समुच्चय को परिभाषित कीजिए।

Define Dense or every where Dense.

4. द्वितीय गणनीय समष्टि क्या है ?

What is second countable space.

5. सम्मिश्र संख्याओं के मापांक और कोणांक लिखिये।

Write the modulus and argument of complex number.

6. संयुग्मी फलन की परिभाषा दीजिए।

Define conjugate function.

7. विभाजन का मानक क्या है ?

What is mesh of partition ?

8. प्रथम मध्यमान प्रमेय लिखिये।

Give the statement of first mean value theorem.

9. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ का मान लिखिये।

Write the value of $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

10. दो श्रेणियों का कॉशी गुणनफल की परिभाषा दीजिए।

Give the definition of Cauchy product of two series.

खण्ड 'ब'

Section 'B'

निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

Solve the following questions : **3 × 5 = 15**

1. सिद्ध कीजिए कि $\log_3 2$ एक परिमेय संख्या नहीं है।

Prove that $\log_3 2$ is not a rational number.

अथवा

Or

माना एक प्रतिचित्रण $d : R \times R \to R$ निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}, (x, y) \in R$$

तो d, R पर एक दूरीक है।

Let a mapping $d : R \times R \to R$ be defined as follows

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}, (x, y) \in R$$

then d is a metric on R.

2. प्रत्येक दूरीक समष्टि प्रथम गणनीय होता है।

Every metric space is first countable space.

अथवा

Or

माना (X, d) तथा (Y, p) दो दूरीक समष्टियाँ हैं और $f : X \to Y$ एक फलन है। तब f संतत् है यदि और केवल यदि $f^{-1}(F)$, X में संवृत्त है जब कभी F, Y में संवृत्त है।

Let (X, d) and (Y, p) be two metric spaces and $f : X \to Y$ be a function. Then f is continuous if and only if $f^{-1}(F)$ is closed in X whenever f is closed in Y.

3. फलन $f(z)$ के विश्लेषिक होने के लिये कॉशी-रीमान समीकरण को व्युत्पन्न कीजिए।

Find the Cauchy-Riemann equation for function $f(z)$ to be analytic.

अथवा

Or

विश्लेषिक फलन $f(z) = u + iv$ का निर्माण कीजिए जहाँ

$$u = y^3 - 3x^2y.$$

Construct the analytic function $f(z) = u + iv$ where

$$u = y^3 - 3x^2y.$$

4. निम्न रीमान समाकल उपरिरीमान समाकल से बड़ा नहीं हो सकता अर्थात्

$$\int_{-a}^{b} f(x)\, dx \leq \int_{a}^{-b} f(x)\, dx.$$

Lower Riemann integral does not greater than upper Riemann integral *i.e.*,

$$\int_{-a}^{b} f(x)\,dx \le \int_{a}^{-b} f(x)\,dx.$$

अथवा

Or

$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ विषम समाकल का मूल्यांकन कीजिए।

Evaluate the improper integral $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$.

5. ऋणेत्तर पदों की कोई श्रेणी अभिसरण करती है यदि और केवल यदि आंशिक संकलन फलनों से एक परिबद्ध अनुक्रम बनता है।

A series of non-negative terms converges iff its partial sums form a bounded sequence.

अथवा

Or

यदि फलन $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1}$ हो तो परिभाषा से $f_y(0, 0)$ और $f_x(0, 0)$ का मान ज्ञात कीजिए।

If $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1}$ then find the value of $f_y(0, 0)$ and $f_x(0, 0)$ by the definition.

खण्ड 'स'

Section 'C'

निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

Solve the following questions : **5 × 5 = 25**

1. किसी दूरीक समष्टि में संवृत्त समुच्चयों के एक स्वेच्छ संग्रह का सर्वनिष्ठ संवृत्त होता है।

In a metric space, then intersection of an arbitrary collection of closed set is closed.

अथवा

Or

R में आर्कमिडीज गुणधर्म का कथन लिखिये एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Archimedian property in R.

2. किसी दूरीक समष्टि में दो संहत उपसमुच्चयों का संघ संहत होता है।

The union of two compact subset of a metric space is compact.

अथवा

Or

माना (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, X में संबद्ध समुच्चयों का परिवार इस प्रकार है कि $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \neq \phi$ तब $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ संबद्ध है।

Let (X, d) be a metric space and let $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ be a family of connected sets in X such that

$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \neq \phi$. Then $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ is connected.

3. विश्लेषिक फलन $u + iv$ को ज्ञात कीजिए जिसका वास्तविक भाग $u = e^x(x \cos y - y \sin y)$ है।

Find the analytic function $f(z) = u + iv$ of which the real part is $u = e^x(x \cos y - y \sin y)$.

अथवा

Or

उस मोबियस रूपान्तरण को ज्ञात कीजिए जो $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ और $z_3 = \infty$ को क्रमशः $w_1 = 1$, $w_2 = i$ तथा $w_3 = -1$ में प्रतिचित्रित करता है।

Find the mobius transformation which maps $z_1 = 0$, $z = 1$ and $z_3 = \infty$ into $w_1 = 1$, $w_2 = i$ and $w_3 = -1$ respectively.

4. यदि $f : [a, b] \to R$, $[a, b]$ पर एक परिबद्ध फलन है तब f, R – समाकलनीय है यदि और केवल यदि प्रत्येक $\in > 0$ के लिये, $[a, b]$ के एक विभाजन P का अस्तित्व इस प्रकार है कि—

$$U(P, f) - L(P, f) < \in.$$

Let $f : [a, b] \to R$ be a bounded function on $[a, b]$. Then $f \in R[a, b]$ if and only if for every $\in > 0$ there exists a partition P of $[a, b]$ such that

$$U(P, f) - L(P, f) < \in.$$

अथवा

Or

दर्शाइये कि $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ अभिसारी है।

Prove that $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ is convergent.

5. यंग प्रेमेय लिखिये तथा सिद्ध कीजिए।

State and prove Young's theorem.

अथवा

Or

$f(x) = x \cos x$ के लिये अन्तराल $[-\pi, \pi]$ में फूरियर श्रेणी प्राप्त कीजिए।

Obtain Fourier's series in the interval $[-\pi, \pi]$ for the function $f(x) = x \cos x$.

❐ ❐ ❐ ❐ ❐ d ❐ ❐ ❐ ❐ ❐