

Roll No.

Total No. of Sections : 3

Total No. of Printed Pages : 9

Annual Online Examination 2021

Code No. : A.B.S-158

B.Sc. Part I

MATHEMATICS

Paper I

[Algebra and Trigonometry]

Time : Three Hours]

[Maximum Marks : 50

नोट : खण्ड 'अ' अतिलघु उत्तरीय प्रकार का, जिसमें दस प्रश्न हैं, अनिवार्य है। खण्ड 'ब' में लघु उत्तरीय प्रकार के प्रश्न हैं एवं खण्ड 'स' में दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं। खण्ड 'अ' को सबसे पहले हल किया जाना है।

Note : Section 'A' containing 10 very short answer type questions, is compulsory. Section 'B' consists of short answer type questions and Section 'C' consists of long answer type questions. Section 'A' has to be solved first.

खण्ड 'अ'

Section 'A'

निम्नांकित अतिलघु उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर एक या दो वाक्यों में दें।

Answer the following very short answer type questions in one or two sentences. **1×10=10**

1. पंक्ति आव्यूहों की रैखिकता: परतन्त्रता को परिभाषित कीजिए।
Define Linear dependence of Row Matrices.

2. वर्गसम आव्यूह को परिभाषित कीजिए।

Define idempotent matrix.

3. बहुकता के मूल को परिभाषित कीजिए।

Define root of a multiplicity.

4. तुल्यता सम्बन्ध को परिभाषित कीजिए।

Define equivalence relation.

5. यदि $f: I \rightarrow I$ जहाँ $f(x) = x^2$ और I पूर्णांक का समुच्चय है तो $f^{-1}(g)$ ज्ञात कीजिए।

If $f: I \rightarrow I$, where $f(x) = x^2$ and I be the set of integer, then find $f^{-1}(g)$.

6. आबेली समूह को परिभाषित कीजिए।

Define abelian group.

7. चक्रीय समूह को परिभाषित कीजिए।

Define cyclic group.

8. समाकारिता की अष्टि को परिभाषित कीजिए।

Define Kernel of homomorphism.

9. यदि n कोई धन पूर्णांक हो, तो $(\sin \theta + i \cos \theta)^n$ ज्ञात कीजिए।

If n is + ve integer, then find $(\sin \theta + i \cos \theta)^n$.

Code No. : A.B.S-158

10. ग्रेगोरी श्रेणी को लिखिए।

Write Gregory's series.

खण्ड 'ब'

Section 'B'

निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दें।

Solve the following questions.

3×5=15

1. दर्शाइये कि R^3 का उपसमुच्चय $\{(3, 4, -1), (1, 2, 0), (1, 0, -1)\}$ रैखिकतः परतंत्र है।

Show that the subset $\{(3, 4, -1), (1, 2, 0), (1, 0, -1)\}$ of R^3 is linearly dependent.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए किसी हर्मिटीय आव्यूह के आइगेन मान वास्तविक होते हैं।

Prove that the eigen values of a Hermitian matrix are reals.

2. यदि समीकरण $x^n - 1 = 0$ के मूल $1, \alpha, \beta, \gamma, \dots$ हैं तो सिद्ध कीजिए कि—

$$(1 - \alpha) (1 - \beta) (1 - \gamma) \dots = n.$$

[3]

P. T. O.

Code No. : A.B.S-158

If $1, \alpha, \beta, \gamma, \dots$ are the roots of the equation $x^n - 1 = 0$, then prove that

$$(1 - \alpha) (1 - \beta) (1 - \gamma) \dots = n.$$

अथवा

Or

यदि समीकरण $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ के दो मूलों का योग तीसरे मूल के बराबर हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$p^3 - 4pq + 8r = 0.$$

If the sum of two roots is equal to third root of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, then prove that :

$$p^3 - 4pq + 8r = 0.$$

3. सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G के दो अवयवों के गुणनफल का प्रतिलोम उनके प्रतिलोमों का उल्टे क्रम में गुणनफल के बराबर होता है।

Prove that the inverse of the product of two elements of a group is the product of the inverse taken in the reverse order.

अथवा

Or

यदि $f: X \rightarrow Y$ और $g: Y \rightarrow Z$ एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है, तो सिद्ध कीजिए कि प्रतिचित्रण $gof: X \rightarrow Z$ भी एकैकी आच्छादक होगा।

[4]

Code No. : A.B.S-158

If $f: X \rightarrow Y$ and $g: Y \rightarrow Z$ be one-one onto mapping, then prove that the mapping $gof: X \rightarrow Z$ is also one-one onto.

4. यदि f समूह G का समूह G' में एक अन्तर्क्षेपी समाकारिता है, तो सिद्ध कीजिए कि f का कर्नेल K , G का एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।

If f is a homomorphism of a group G into group G' , then prove that kernel K of f is a normal subgroup of G .

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए दो उपवलय का सर्वनिष्ठ एक उपवलय होता है।

Prove that the intersection of two subring is a subring.

5. यदि $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \theta$ तो सिद्ध कीजिए कि—

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\theta.$$

If $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \theta$, then prove that

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\theta.$$

[5]

P. T. O.

Code No. : A.B.S-158

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि—

$$\tan \left(i \log \frac{a - ib}{a + ib} \right) = \frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$

Prove that :

$$\tan \left(i \log \frac{a - ib}{a + ib} \right) = \frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$

खण्ड 'स'

Section 'C'

निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Solve the following questions.

5×5=25

1. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ के आइगेन मान और संगत आइगेन सदिशों को ज्ञात कीजिए।

Determine the eigen values and the corresponding

eigen vector of the matrix $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$.

[6]

Code No. : A.B.S-158

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक वर्ग आव्यूह स्वतः के अभिलाक्षणिक समीकरण को संतुष्ट करता है।

Prove that every square matrix satisfies its characteristic equation.

2. आव्यूह विधि से हल कीजिए—

$$x + y + z = -3$$

$$3x + y - 2z = -2$$

$$2x + 4y + 7z = 7.$$

Solve by matrix method :

$$x + y + z = -3$$

$$3x + y - 2z = -2$$

$$2x + 4y + 7z = 7.$$

अथवा

Or

दकार्ते विधि द्वारा समीकरण $x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$ को हल कीजिए।

Solve the biquadratic equation $x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$ by Descartes's method.

[7]

P. T. O.

Code No. : A.B.S-158

3. एक समूह G के एक अरिक्त उपसमुच्चय H के एक उपसमूह होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध यह है कि $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ जहाँ b^{-1} , b का प्रतिलोम है।

If G is a group and H be a non-empty subset of G , then H is a subgroup of G if and only if $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$, where b^{-1} is the inverse of b in G .

अथवा

Or

लैग्रान्ज प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Lagrange's theorem.

4. सिद्ध कीजिए सभी समूहों के समुच्चय में तुल्याकारिता का सम्बन्ध एक तुलनात्मक सम्बन्ध होता है।

Prove that the isomorphism in the set of all groups is an equivalent relation.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए प्रत्येक पूर्णाकीय प्रान्त एक क्षेत्र होता है।

Prove that every finite integral domain is a field.

5. यदि $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \dots (a_n + ib_n) = A + iB$, तो दर्शाइए कि—

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \dots (a_n^2 + b_n^2) = A^2 + B^2.$$

[8]

Code No. : A.B.S-158

If $(a_1 + ib_1) (a_2 + ib_2) \dots\dots\dots (a_n + ib_n) = A + iB$, then show that :

$$(a_1^2 + b_1^2) (a_2^2 + b_2^2) \dots\dots\dots (a_n^2 + b_n^2) = A^2 + B^2.$$

अथवा

Or

हल कीजिए—

$$x^2 + 1 = 0.$$

Solve that :

$$x^2 + 1 = 0.$$

d