

Roll No. _____

Special Online Examination Nov. 2020**B.Sc. Part II****MATHEMATICS**

Paper I

(Advanced Calculus)

Time : 3 Hours]

[MAXIMUM MARKS : 50

नोट : खण्ड 'अ', 'ब', 'स' निम्नलिखित निर्देशानुसार हल कीजिए।

Note : Attempt Section 'A', 'B', 'C' according to the following instructions.

खण्ड 'अ' (5 × 2 = 10)
(Section 'A')

नोट : सभी पाँच प्रश्न हल कीजिए। एक या दो लाइन में उत्तर दीजिए।

Note : Attempt all the five questions. Answer write in one or two lines.

1. कौशी का सीमा पर प्रथम प्रमेय लिखिए।

Write Cauchy's first theorem on limit.

2. लाग्रान्ज का माध्यमान प्रमेय लिखिए।

Write Lagrange's Mean Value Theorem.

P. T. O.

3. टेलर का प्रमेय लिखिए।

Write Taylor's Theorem.

4. उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ के लिए आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध लिखिए।

Write the necessary and sufficient condition for maxima and minima.

5. द्विगुणन सूत्र लिखिए।

Write Duplication formula.

खण्ड 'ब' (5 × 3 = 15)
(Section 'B')

नोट : सभी पाँच प्रश्न हल कीजिए। उत्तर के लिए शब्द सीमा 100 से 150 शब्द।

Note : All the five questions are compulsory. Answer with word limit 100-150 words.

इकाई – I

(Unit– I)

1. अभिसारिता का परीक्षण कीजिए—

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{5}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

V—251

[3]

Test the convergence of the following series :

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{5}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

अथवा /Or

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक कौशी अनुक्रम परिबद्ध होता है।

Prove that every Cauchy sequence is bounded.

इकाई – II
(Unit- II)

2. दिए गए फलन के लिए रोले का प्रमेय संतुष्ट कीजिए—

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

Verify Rolle's Theorem for the following functions :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

अथवा /Or

माध्यमान प्रमेय से c का मान ज्ञात कीजिए—

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x,$$

यदि $a = 1, b = 3$.

V-251

P. T. O.

[4]

Find 'c' of mean value theorem :

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x,$$

if, $a = 1, b = 3$.

इकाई – III
(Unit- III)

3. यदि $u = x^4y^5 + x^5y^4$, तो $\frac{du}{dt}$ का मान ज्ञात कीजिए

जहाँ $x = t^2, y = t^3$ ।

If $u = x^4y^5 + x^5y^4$, find the value of $\frac{du}{dt}$ where $x = t^2, y = t^3$.

अथवा /Or

यदि $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, तो $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ का मान ज्ञात कीजिए।

If $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, then evaluate $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$.

इकाई – IV
(Unit- IV)

4. अन्वालोप ज्ञात कीजिए सरल रेखा के कुल $y = mx + \frac{a}{m}$.

V-251

[5]

Find the envelop of the family of straight line

$$y = mx + \frac{a}{m}.$$

अथवा /Or

फलन $f(x, y) = x^3 - 4xy + 2y^2$ का उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

Find maxima or minima of the function :

$$f(x, y) = x^3 - 4xy + 2y^2.$$

इकाई – V
(Unit– V)

5. मान ज्ञात कीजिए—

$$\int_0^{\infty} \frac{x^5 (1-x)}{(1+x)^{13}} dx.$$

Evaluate :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^5 (1-x)}{(1+x)^{13}} dx.$$

अथवा /Or

मान ज्ञात कीजिए—

$$\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (x+y+z) dx dy dz.$$

V–251

P. T. O.

[6]

Evaluate :

$$\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (x+y+z) dx dy dz.$$

खण्ड 'स'

(5 × 5 = 25)

(Section 'C')

नोट : सभी पाँच प्रश्न हल कीजिए। उत्तर के लिए शब्द सीमा 200 से 250 शब्द।

Note : All the five questions are compulsory. Answer with word limit 200-250 words.

इकाई – I

(Unit– I)

1. सिद्ध कीजिए कि—

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)(n+2) \dots (n+n)}{n^n} \right]^{1/n} = \frac{4}{e}.$$

Prove that :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)(n+2) \dots (n+n)}{n^n} \right]^{1/n} = \frac{4}{e}.$$

अथवा /Or

अभिसारिता का परीक्षण कीजिए—

$$x + \frac{3}{5}x^2 + \frac{8}{10}x^3 + \frac{15}{17}x^4 + \dots + \frac{n^2-1}{n^2+1}x^n + \dots$$

V–251

[7]

Test the convergence of the following :

$$x + \frac{3}{5}x^2 + \frac{8}{10}x^3 + \frac{15}{17}x^4 + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}x^n + \dots$$

इकाई – II
(Unit– II)

2. बोरेल का प्रमेय लिखकर, सिद्ध कीजिए।

State and prove Borel's Theorem.

अथवा /Or

माना $a, b \in \mathbb{R}$ इस प्रकार $0 < a < b$, तो सिद्ध कीजिए—

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \tan^{-1} b - \tan^{-1} a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

निगमित कीजिए

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{24} < \tan^{-1} \frac{3}{4} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$$

Let $a, b \in \mathbb{R}$ such that $0 < a < b$, then prove that :

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \tan^{-1} b - \tan^{-1} a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

Deduce that

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{24} < \tan^{-1} \frac{3}{4} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$$

V–251

P. T. O.

[8]

इकाई – III
(Unit– III)

3. यदि $x^x y^y z^z = c$, दर्शाइए कि

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -(x \log e^x)^{-1}$$

If $x^x y^y z^z = c$, then show that

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -(x \log e^x)^{-1}$$

अथवा /Or

$$\text{यदि } u^3 + v^3 + w^3 = x + y + z$$

$$u^2 + v^2 + w^2 = x^3 + y^3 + z^3$$

$$u + v + w = x^2 + y^2 + z^2$$

दर्शाइए कि

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \frac{(y-z)(z-x)(x-y)}{(u-v)(v-w)(w-u)}$$

$$\text{If } u^3 + v^3 + w^3 = x + y + z$$

$$u^2 + v^2 + w^2 = x^3 + y^3 + z^3$$

$$u + v + w = x^2 + y^2 + z^2$$

V–251

[9]

show that

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \frac{(y-z)(z-x)(x-y)}{(u-v)(v-w)(w-u)}.$$

इकाई - IV
(Unit- IV)

4. उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ ज्ञात कीजिए—

$$u = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x + y).$$

Find Maxima and Minima :

$$u = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x + y).$$

अथवा /Or

केन्द्रज का समीकरण ज्ञात कीजिए परवलय का $y^2 = 4ax$.

Find the equation of the evaluate of the parabola $y^2 = 4ax$.

इकाई - V
(Unit- V)

5. सिद्ध कीजिए—

$$\Gamma(m)\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \Gamma(2m).$$

V-251

P. T. O.

[10]

Prove that :

$$\Gamma(m)\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \Gamma(2m).$$

अथवा /Or

निम्न समाकलन का क्रम परिवर्तित कीजिए—

$$\int_0^a \cos \alpha \int_{x \tan \alpha}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dx dy.$$

Change the order of Integration :

$$\int_0^a \cos \alpha \int_{x \tan \alpha}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dx dy.$$

***** B *****

V-251

10 / 275