

Roll No. _____

Special Online Examination Nov. 2020**B.Sc. Part II
MATHEMATICS**

Paper II

(Differential Equation)

Time : 3 Hours]

[MAXIMUM MARKS : 50

नोट : खण्ड 'अ', 'ब', 'स' निम्नलिखित निर्देशानुसार हल कीजिए।

Note : Attempt Section 'A', 'B', 'C' according to the following instructions.

खण्ड 'अ' (5 × 2 = 10)
(Section 'A')

नोट : सभी पाँच प्रश्न हल कीजिए। एक या दो लाइन में उत्तर दीजिए।

Note : Attempt all the five questions. Answer write in one or two lines.

1. दर्शाइए कि—

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right).$$

P. T. O.

Show that :

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right).$$

2. $L^{-1} \left\{ \frac{1}{P^4} - \frac{3P}{P^2 + 16} + \frac{5}{P^2 + 4} \right\}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate $L^{-1} \left\{ \frac{1}{P^4} - \frac{3P}{P^2 + 16} + \frac{5}{P^2 + 4} \right\}$.

3. हल कीजिए—

$$xzp + yzq = xy.$$

Solve :

$$xzp + yzq = xy.$$

4. हल कीजिए—

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 y.$$

Solve :

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 y.$$

5. यदि वर्ग C [0, 1] पर एक फलनक $I[y(x)] = \int_0^1 y(x) dx$ परिभाषित है, तो सिद्ध कीजिए कि—

$$I[1] = 1 \text{ तथा } I[\sin \pi x] = \frac{2}{\pi}.$$

[3]

If a functional $I [y(x)] = \int_0^1 y(x) dx$ is defined on the class $C [0, 1]$, then prove that :

$$I [1] = 1 \text{ and } I [\sin \pi x] = \frac{2}{\pi}.$$

खण्ड 'ब' (5 × 3 = 15)
(Section 'B')

नोट : सभी पाँच प्रश्न हल कीजिए। उत्तर के लिए शब्द सीमा 100 से 150 शब्द।

Note : All the five questions are compulsory. Answer with word limit 100-150 words.

इकाई - I
(Unit- I)

1. $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x - 2$ को लेजान्ड्रे बहुपदों में व्यक्त कीजिए।

Express $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x - 2$ in terms of Legendre polynomials.

अथवा /Or

सिद्ध कीजिए—

$$\int_0^{\pi/2} J_{2n}(2x \cos \theta) d\theta = \frac{\pi}{2} [J_n(x)]^2.$$

V-252

P. T. O.

[4]

Prove that :

$$\int_0^{\pi/2} J_{2n}(2x \cos \theta) d\theta = \frac{\pi}{2} [J_n(x)]^2.$$

इकाई - II
(Unit- II)

2. हल कीजिए—

$$(D^2 - 2D + 2)y = 0, y = Dy = 1$$

$$\text{जब } t = 0, D \equiv \frac{d}{dt}.$$

Solve :

$$(D^2 - 2D + 2)y = 0, y = Dy = 1$$

$$\text{when } t = 0, D \equiv \frac{d}{dt}.$$

अथवा /Or

संवलन प्रमेय के प्रयोग से सिद्ध कीजिए—

$$\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^n dx = \frac{\overline{m} \overline{n}}{\overline{m+n}}, m > 0, n > 0.$$

V-252

[5]

Use convolution theorem to prove that :

$$\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^n dx = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, m > 0, n > 0.$$

इकाई - III
(Unit- III)

3. यदि $z = f(x + ay) + \phi(x - ay)$ है, तो सिद्ध कीजिए—

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

If $z = f(x + ay) + \phi(x - ay)$, then prove that :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

अथवा /Or

हल कीजिए—

$$(y + z) p + (z + x) q = x + y.$$

Solve :

$$(y + z) p + (z + x) q = x + y.$$

V—252

P. T. O.

[6]

इकाई - IV
(Unit- IV)

4. हल कीजिए—

$$(D^2 - 2DD' + D'^2) z = 12xy$$

$$\text{जहाँ } D = \frac{\partial z}{\partial x}, D' = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Solve :

$$(D^2 - 2DD' + D'^2) z = 12xy$$

$$\text{where } D = \frac{\partial z}{\partial x}, D' = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

अथवा /Or

हल कीजिए—

$$p + r + s = 1$$

$$\text{जहाँ } r = \frac{\partial^2 z}{\partial z^2}, s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, p = \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Solve :

$$p + r + s = 1$$

$$\text{where } r = \frac{\partial^2 z}{\partial z^2}, s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, p = \frac{\partial z}{\partial x}.$$

V—252

[7]

इकाई – V
(Unit– V)

5. फलन

$$I [y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2) dx, y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

का चरममान (उच्चिष्ठ) परीक्षण कीजिए।

Test for extremum the functional

$$I [y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2) dx, y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

अथवा /Or

दीर्घवृत्त $4x^2 + 9y^2 = 36$ एवं बिन्दु A (1, 0) के मध्य लघुत्तम दूरी ज्ञात कीजिए।Find the shortest distance between the ellipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ and the point A (1, 0).खण्ड 'स' (5 × 5 = 25)
(Section 'C')

नोट : सभी पाँच प्रश्न हल कीजिए। उत्तर के लिए शब्द सीमा 200 से 250 शब्द।

Note : All the five questions are compulsory. Answer with word limit 200-250 words.

V – 252

P. T. O.

[8]

इकाई – I
(Unit– I)1. रैखिक अवकल समीकरण $4xy'' + 2y' + y = 0$ का श्रेणी हल ज्ञात कीजिए।Find the series solution of the linear equation $4xy'' + 2y' + y = 0$.

अथवा /Or

स्टर्म-ल्यूविल समस्या

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0$$

$$y'(1) = 0 = y'(e^{2\pi}), \lambda \geq 0, x > 0$$

के आइगेन मानों और आइगेन फलनों को प्राप्त कीजिए।

Obtain the eigen values and eigen functions of the Sturm-Liouville problem

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0$$

$$y'(1) = 0 = y'(e^{2\pi}), \lambda \geq 0, x > 0.$$

V – 252

[9]

इकाई – II
(Unit- II)

2. लाप्लास रूपान्तरण विधि का प्रयोग करके समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 5y = (\cos t - \sin t) e^{-2t}$$

को $y(0) = 1, y'(0) = -3$ के अधीन हल कीजिए।

Using the method of Laplace transformation solve the solution

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 5y = (\cos t - \sin t) e^{-2t}$$

subject to the condition $y(0) = 1, y'(0) = -3$.

अथवा /Or

यदि $L^{-1} \left\{ \frac{e^{-1/p}}{p^{1/2}} \right\} = \frac{\cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}}$ तो $L^{-1} \left\{ \frac{e^{-a/p}}{p^{1/2}} \right\}$, ज्ञात कीजिए जहाँ $a > 0$.

If $L^{-1} \left\{ \frac{e^{-1/p}}{p^{1/2}} \right\} = \frac{\cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}}$, find $L^{-1} \left\{ \frac{e^{-a/p}}{p^{1/2}} \right\}$, where $a > 0$.

इकाई – III
(Unit- III)

3. सम्बन्ध $\phi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$ से स्वेच्छ फलन ϕ को विलोपित करके एक आंशिक अवकल समीकरण को निर्मित कीजिए।

V-252

P. T. O.

[10]

Form the partial differential equation by eliminating the arbitrary ϕ from $\phi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$.

अथवा /Or

हल कीजिए—

$$x^2(y - z)p + y^2(z - x)q = z^2(x - y).$$

Solve :

$$x^2(y - z)p + y^2(z - x)q = z^2(x - y).$$

इकाई – IV
(Unit- IV)

4. मोन्जे विधि से हल कीजिए—

$$r + (a + b)s + abt = xy.$$

Solve by Monge's method :

$$r + (a + b)s + abt = xy.$$

अथवा /Or

हल कीजिए—

$$(D^2 + 2DD' + D'^2)z = 2 \cos y - x \sin y.$$

V-252

Solve :

$$(D^2 + 2DD' + D'^2) z = 2 \cos y - x \sin y.$$

इकाई – V
(Unit– V)

5. फलनक $\int_a^b (y^2 + y'^2 + 2ye^x) dx$ का चरम मान ज्ञात कीजिए।

Find the extremue of the function

$$\int_a^b (y^2 + y'^2 + 2ye^x) dx.$$

अथवा /Or

परवलय $y = x^2$ तथा सरल रेखा $x - y = 5$ के मध्य लघुत्तम दूरी ज्ञात कीजिए।

Find the shortest distance between the parabola $y = x^2$ and the straight line $x - y = 5$.

***** B *****